ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 2014, № 2, с. 53–62

УДК 550.831.017

СКРЫТАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

© 2014 г. А. И. Кобрунов

Ухтинский Государственный технический университет, г. Ухта

E-mail: aikobrunov@gmail.com

Поступила в редакцию 04.06.2013 г.

Изучаются аналитические свойства решений обратной задачи гравиметрии в рамках аппроксимационного подхода и метода линейных интегральных представлений. Выявлен и изучен новый эффект наследования специфических аналитических свойств в решениях, получивший название “эффект скрытой эквивалентности”. Его влияние в существенном сказывается на содержательности полученных при решении обратных задач результатов для сложных моделей сред и должно быть учтено при геологической интерпретации гравиметрических данных. Эффект скрытой эквивалентности изучен как в линейной так и нелинейной постановках обратной задачи. В качестве примера нелинейной задачи рассмотрена обратная структурная задача гравиметрии. Показана связь уравнений границ с краевыми значениями гармонических функций. Предлагаются способы учета возникающих эффектов дополнением аппроксимационного подхода для сложных условий (модели сред с пространственно распределенными параметрами), критериальными и динамическими принципами.

DOI: 10.7868/S0002333714020045

Вычислительной основой, обеспечивающей эффективность интерпретации гравиметрических данных, служит решение обратных задач [Страхов, 1962; Страхов, 1998], суть которых состоит в нахождении плотностной модели изучаемой среды в выделенной области по известному ее гравитационному влиянию вне этой области. Хорошо известно, что эта задача в высшей степени некорректна. Во-первых, ее решение не удовлетворяет ни одному из условий корректности по Адамару [Иванов, 1978]. Во-вторых, также и само выделение компоненты гравитационного поля [Магницкий, 1949], имеющей источниками массы, сконцентрированные исключительно в выделенной, изучаемой области – задача, недоопределенная, решаемая с большой долей приближения и зачастую при жестких ограничениях. Ее предмет – это редуцирование гравитационных полей, которое выполняется, как правило, многократно и относится к числу методических приемов анализа гравитационного поля [Андреев, 1962].

Основным предметом рассмотрения настоящей работы служат свойства решений собственно обратных задач вне проблем редуцирования. Причина пристального к ним обращения состоит в том, что аналитические свойства получаемых решений, неявно наследуемые в алгоритмах решения обратных задач гравиметрии, могут превалировать над их геологической содержательностью, самым радикальным способом сказываясь на достоверности и эффективности геологической интерпретации результата.

Основным приемом решения обратных задач служат методы, основанные на аппроксимационном подходе [Страхов, 1999], служащим обобщением и формализацией широко распространенных методов подбора [Юньков, 1958; Страхов, 1964]. Главной проблемой виделось увеличение аппроксимационных возможностей используемых конструкций и преодоление возникающих при этом эффектов неустойчивости [Страхов, 1999]. Тем не менее, при практической реализации методов решения линейных обратных задач гравиметрии в рамках методов подбора (аппроксимационный подход) в определенных условиях проявлялись специфические эффекты в решениях [Кобрунов, 1983] типа концентрации аномальных масс у границ изучаемого объекта, которые лишали содержательности и возможности осмысленной интерпретации получаемых результатов. Чаще всего коррективы вносились на этапе геологической интерпретации “ручным” способом, однако преодолеть их отрицательное влияние не удавалось. Это сдерживало применимость ясных и удобных для реализации методов подбора при изучении сложно построенных сред и, в конечном итоге, вело к получению заведомо ошибочных результатов. Эффекты проявления специфических аналитических свойств в решениях обратных задач, основанных на аппроксимационных конструкциях в условиях, когда эти конструкции еще не выходили за класс единственности, получили название эффектов скрытой эквивалентности [Кобрунов, 2008]. Эти эффекты имеют причиной существование у исходной обратной задачи

широкого класса эквивалентности – т.е. семейства эквивалентных решений. Для линейных задач этот класс образует линейное подпространство в пространстве распределений плотности. На используемой аппроксимационной конструкции такой эквивалентности нет. Она строилась, имея в виду некоторый образ реальной модели. Но может так случиться, и случается на самом деле, что среди элементов эквивалентных по полю реальной модели есть иной, совершенно чуждый геологическим установкам – формальный элемент, который выбранной аппроксимационной конструкцией подбирается лучше, чем истинный. В итоге, в качестве решения обратной задачи в классе аппроксимационных моделей будет получено приближение не к истинной модели, а к этому формальному и геологически чуждому распределению. Это тонкий эффект, слабо поддающийся анализу и управлению, но, тем не менее, существенно ограничивающий применимость методов основанных на аппроксимационном принципе.

Настоящая работа посвящена изучению эффекта скрытой эквивалентности в гравиметрии и выработке контр мер для его преодоления.

ЭФФЕКТ СКРЫТОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Пусть в выделенной области V нижнего полупространства $z > 0$ (используется традиционная прямоугольная декартова система координат XYZ с осью OZ, направленной вниз) искомое распределение плотности $\sigma(v)$: $v = \{x, y, z\}$ по вертикальной производной гравитационного потенциала $u(s_0)$: $s_0 = \{x_0, y_0\}$, заданной на поверхности $z_0 = \psi(x_0, y_0)$:

$$A_V[\sigma(v), \psi(x_0, y_0)] = \int_V \frac{\sigma(v)(z - \psi(x_0, y_0))\,dxdydz}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - \psi(x_0, y_0))^2\right]^{3/2}} = \frac{u(x_0, y_0)}{\gamma}, \quad (1)$$

γ – гравитационная постоянная.

В частности, для задач анализа можно считать, без существенного влияния на результат $\psi(x_0, y_0) \equiv z_0 > 0 = \text{const}$, что приводит к:

$$A_V[\sigma(v)] = \gamma \int_V \frac{\sigma(v)(z - z_0)\,dxdydz}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma} = u(s_0). \quad (2)$$

Кажущимся обобщением в вопросах исследования эквивалентности служит рассмотрение поля $\frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma} = u(s_0)$, заданного в конечном множестве точек либо системы функционалов от поля. Однако на самом деле эти рассмотрения только расширяют эффекты эквивалентности и проявляющиеся для (2) проявляется и во всех этих частных случаях. Такое обобщение легко выполняется и сводится к цепочке включений классов эквивалентности и классов единственности по иерархии способов задания наблюдаемой $u(s_0)$. Эти вопросы, а также аналитические свойства оператора (1) достаточно полно изучены [Кобрунов, 1985]. В частности, известно, что для любой ограниченной области V, (2) есть вполне непрерывный оператор из $L_p(V)$ в $L_q(E_0)$: $E_0 = -\infty \le x_0,\ y_0 \le \infty$; $1 \le p, q \le \infty$, а для неограниченной области, V включаемой в полосу П: $0 > z_1 > z_2 < \infty$ вполне непрерывен при условии $1 \le p \le q \le \infty$.

Хорошо известны и формализованы принципы, лежащие в основе методов инверсии апроксимационного типа [Кобрунов, 2008]. В главном они включают следующие две компоненты:

- содержательную аппроксимационную конструкцию M, среди элементов которой m ищется решение обратной задачи;
- функционала $J[\ ]$, минимизация которого реализует технологию нахождения квазирешения:

$$\underset{\sigma(v) \in M}{J[A_V[\sigma(v)], u(s_0)] \to \min}. \quad (3)$$

Должны выполняться следующие условия:

1. Конструкция M должна быть содержательна относительно неизвестного распределения $\sigma_1(v)$, которое отражает реальную геологическую модель. Предполагается, что найденное в дальнейшем квазирешение m_1 на M располагается в окрестности этого распределения: $\|\sigma_1(v) - m_1\|_X \le \varepsilon$, где ε достаточно мало.

2. Конструкция M должна быть классом единственности: из $\xi_1, \xi_2 \in M$; $A_V[\xi_1] = A_V[\xi_2]$ следует $\xi_1 = \xi_2$.

3. Функционал (3) сильно выпуклый на M. В частности:

$$J[A_V[\sigma(v)], u(s_0)] = \|A_V[\sigma(v)] - u(s_0)\|_Y^2. \quad (4)$$

Содержательность аппроксимационной конструкции включает в себя помимо допустимой величины меры содержательности ε, норму пространства X, относительно которой минимизируется мера содержательности.

Из условий 2 и 3 следует единственность решения задачи (4), которое обозначим m_2. Для пары банаховых пространств X и Y, в которых $A_V[\sigma(v)]$

замкнут, и образ этого оператора вкладывается в банахово пространство Y: $\operatorname{Im} A_V[\sigma(v)] \subseteq Y$; если множество $\Omega_u(A_V, X) = \{\sigma(v) \in X\colon A_V[\sigma(v)] = u(s_0)\}$ – класс эквивалентности для оператора $A_V[\sigma(v)]$, то $\Omega_u(A_V, X)$ замкнуто и существует единственная проекция σ_2 элемента m_2 на $(\Omega_u(A, X) \subseteq \subseteq \Omega_u(A_V[\sigma(v), \psi(x_0, y_0)], X)$. Таким образом, в результате построения квазирешения на M для обратной задачи для (2):

$$A_V[\sigma(v)] = u(s_0); \quad \sigma(v) \in M, \tag{5}$$

будет получен элемент m_2, аппроксимирующий не то реальное распределение $\sigma_1(v)$, под которое "подстраивалась" аппроксимационная конструкция M, а некоторый иной элемент $\sigma_2(v)$ из класса эквивалентности $\Omega_u(A_V, X)$, который может оказаться весьма далеким от "запланированного" $\sigma_1(v)$. Пара m_2 и $\sigma_2(v)$ представляют собой решение задачи:

$$\|\sigma_2(v) - m_2\|_X = \|\sigma(v) - m\|_X \to \min, \quad \sigma(v) \in \Omega_u(A_V, X),\ m \in M \tag{6}$$

которое при достаточно универсальных аппроксимационных конструкциях M весьма чувствительно к выбору нормы в X.

Попытка геологической интерпретации полученного квазирешения m_2, а по существу элемента из класса эквивалентности $\sigma_2(v)$, обречены на получение ошибочных заключений. Таким образом, построение единственного квазирешения на аппроксимационной конструкции, где нет явной эквивалентности, в том числе и практической, может привести к аппроксимации совершенно чуждого геологическому смыслу, заложенному в выборе содержательной конструкции M, результату. Этот эффект называется эффектом скрытой эквивалентности.

Следующие свойства классов эквивалентности почти очевидны, и, тем не менее, полезны для оперирования этими понятиями:

1. Если $M \subseteq N \subseteq X$, то $\Omega_u(A_V, M) \subseteq \Omega_u(A_V, N) \subseteq \subseteq \Omega_u(A_V, X)$ при общем носителе V элементов из M, N, X.

2. Если $W \subseteq V$, то $\Omega_u(A_W, X) \subseteq \Omega_u(A_V, X)$.

3. Ортогональная проекция $P_{L_2(V)}(\sigma(v), G)$ в $L_2(V)$ распределения плотности $\sigma(v)$ на подпространство G гармонических в V функций есть преобразование из $\Omega_u(A_V, X)$ в себя.

Последний результат следует из известной теоремы П.С. Новикова [Новиков, 1938] о равенстве нулю интеграла от произведения любой гармонической функции на функцию с нулевым внешним потенциалом. Действительно, необходимым и достаточным условием на ортогональную проекцию в $L_2(V)$ элемента $\sigma(v)$ на подпространство G служит условие

$$\int_V \left[P_{L_2(V)}(\sigma(v)) - \sigma(v)\right] g(v)\, dv = 0, \quad \forall g(v) \in G. \tag{7}$$

Но тогда по теореме П.С. Новикова: $A_V\left[P_{L_2(V)}(\sigma(v)) - \sigma(v)\right] = 0$, что и доказывает требуемое.

Следствием из него служит тот факт, что множество $\Omega_u(A_V, G)$ состоит только из одного элемента, и, следовательно, класс гармонических функций служит примером класса, на котором уравнение (2) однозначно и плотно разрешимо.

Столь пристальное внимание к гармоническим функциям как возможным решениям обратной задачи гравиметрии, связано с двумя взаимоувязанными обстоятельствами. Во-первых, гармоническая в области V функция есть единственное нормальное решение уравнения (2) [Кобрунов, 1985]. Во-вторых, квазирешения в линейных обратных задачах (5) на линейных аппроксимационных конструкциях M в квадратичных метриках представляют собой проекцию некоторой гармонической функции на подпространство M.

Действительно, пусть $\mathbf{\Psi}$, замкнутый оператор из $L_2(E_0)$ в себя и $\Psi(\mathrm{ImA}[\ ]) \subseteq L_2(E_0)$. Он имеет смысл критерия подбора поля. Это, например, операторы вычисления высших производных, умножение на весовые функции и так далее. Квазирешение для (5) определено как решение задачи:

$$\|\mathbf{\Psi}[A_V[\sigma(v)] - u(s_0)]\|_{L_2}^2 \to \min, \quad \sigma(v) \in M. \tag{8}$$

Примером класса M в современной реализации служит широко распространенная сеточная конструкция [Мартышко, 2013].

Попытка получения формализованного решения обратных задач в рамках методов подбора заведомо обречена на неудачу. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для того, чтобы элемент $\bar{\sigma}(v)$ был решением задач (7) при условии что M – класс единственности, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая гармоническая в V функция $g(v) \in G$, что

$$\bar{\sigma}(v) = P_{L_2(V)}(g(v), M). \tag{9}$$

Линейная конструкция M есть класс единственности тогда и только тогда, когда любой ее элемент служит прообразом некоторой гармони-

ческой функции при ортогональном проектировании.

Действительно, переписываем (7) в форме:

$$\left\|\mathbf{\Psi}\left[A_V[P_{L_2(V)}(\sigma(v),M)]-u(s_0)\right]\right\|_{L_2}^2 \to \min. \quad (10)$$

После чего учитывая линейность и ограниченность $P_{L_2(V)}(\sigma(v),M)$, выписываем уравнения Эйлера для (9), которые в силу линейности компонент являются и достаточными условиями:

$$P^*_{L_2(V)}(A^*_V\mathbf{\Psi}[A_V[P_{L_2(V)}(\sigma(v),M)]-u(s_0)],M)=0. \quad (11)$$

Звездочка над оператором означает его сопряжение. В частности ортогональный проектор есть линейный самосопряженный оператор [Ахиезер, 1966]: $P_{L_2(V)}[\cdot]=P^*_{L_2(V)}[\cdot]$;

$$A^*_V[\varphi(s_0)]=P_V\iint\limits_{E_0}\frac{\varphi(s_0)[z-z_0]dx_0dy_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z]^2]^{3/2}};$$

P_V – проектирование на пространство функций с носителем V.

Учитывая единственность решения (9) получаем, что существует сходящаяся последовательность:

$$\sigma^{n+1}(v) = \sigma^n(v)+\alpha^n P^*_{L_2}(v)\times$$

$$\times(A^*_V\mathbf{\Psi}[A_V[P_{L_{2(v)}}(\sigma^n(v),M)]-uS_0],M) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^n(v) = \sigma(v).$$

Откуда следует:

$$\sigma^{n+1}(v) = \sigma^0(v)+$$

$$+\Sigma_n\alpha^n P^*_{L_2(v)}(A^*_V\mathbf{\Psi}[A_V([P_{L_2(v)}\sigma^n(v),M)]- \quad (12)$$

$$-u(S_0)],M).$$

Так как M класс единственности, то выбор нулевого приближения не влияет на результат решения и можно считать $\sigma^0(v)=0$. Поскольку $\operatorname{Im} A^*_V\subseteq\subseteq G$, то из (11) следует требуемое (8). В том случае, если M не есть класс единственности, то результат решения (9) зависит от выбранного нулевого приближения $\sigma^0(v)$ и (8) преобразуется к виду: $\bar\sigma(v)=$ $=\sigma^0(v)+P_{L_2(V)}(g(v),M)$. Таким образом, отличие результата от нулевого приближения состоит в добавлении проекции на M гармонической функции.

Замечание. Свойство (8) не зависит от того, какой оператор "подбора поля" $\mathbf{\Psi}$ выбран. Он влияет лишь на конкретный выбор гармонической функции, но не выводит из класса гармоничности. Гармонические функции, обладая свойством максимума модуля на границе области V наследуются в проекции на M, если M достаточно широк. Таким образом, возникает дилемма: либо аппроксимационная конструкция достаточно широка для того, чтобы содержательно аппроксимировать реальную геологическую модель (и тогда получаемые решения в своем отличии от начальной модели наследуют только свойства гармоничности квазирешений, лишая их геологического смысла), либо конструкция достаточно жесткая, чтобы свойства гармоничности не проявлялись. Но в последнем случае возникает вопрос о ее содержательности. Эта фундаментальная проблема методов решения обратных задач гравиметрии в рамках аппроксимационного подхода, ведет к заблуждениям в итогах геологической интерпретации результатов гравиметрии. Решения обратной задачи гравиметрии в линейных аппроксимационных конструкциях тяготеют к гармоническим распределениям и это следствие описанного эффекта скрытой эквивалентности.

Причина, по которой гармонические функции определяют свойства получаемого квазирешения, кроется в том, что для класса эквивалентности $\Omega_u(A_V,L_2)$ именно гармонические функции обеспечивают наименьшее уклонение от нуля в квадратичной метрике. По этой причине именно гармонические добавки и их проекции получаются в конструкциях квазирешений.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В МЕТОДЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В.Н. СТРАХОВА

Альтернативным подходом к методам подбора с призматическими аппроксимацционными конструкциями служит метод линейных интегральных представлений, активно пропагандируемый В.Н. Страховым [Страхов, 1990а] для решения обратной задачи гравиметрии. Тем не менее, гармонические решения и, как следствие, эффекты скрытой эквивалентности достаточно рельефно проявляются в этом подходе.

Метод линейных интегральных представлений В.Н. Страхова имеет формально-математическую запись, особенностями которой служит задание условий (1) в более общем виде как уравнений:

$$\sum_{r=1}^{R}\int\limits_{M_r}Q^i_r(\xi)\sigma_r(\xi)\,d\mu_r = f_i, \quad (13)$$

с носителями для источников разного вида (числом R) – многообразия M_r, видов источников $\sigma_r(\xi)$, распределенных на этих многообразиях с мерами $\mu_r(\xi)$, и ядрами данных $Q^i_r(\xi)$ своими для каждого вида из R источников. Данные f_i осложнены погрешностями δf_i.

В частности для (2) в обозначениях (12):

$\xi = \{x, y, z\}$; $f_i = \dfrac{u(x_i, y_i)}{\gamma}$; (x_i, y_i) – дискретные точки наблюдения поля;

$Q_r^i(\xi) = \dfrac{z}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2\right]^{3/2}}$; $R = 1$; $M_r = V$, μ – мера Лебега $dxdydz$.

Для случая $R > 1$ распределения $\sigma_r(\xi)$ могут быть, например, поверхностными, линейными, точечными массами с соответствующей корректно определенной плотностью. Тогда M_r – носители для этих распределений.

Доопределяется задача (12), в методе линейных интегральных представлений осуществляется требованием минимума квадратичного функционала:

$$F(\sigma) = \sum_{r=1}^{R} \int_{M_r} \frac{\sigma_r^2(\xi)}{p_r^2(\xi)} d\mu_r(\xi) \to \min. \qquad (14)$$

$p_r(\xi)$ – весовые функции, обобщением которого служат линейные комбинации $F(\sigma)$ и $\Phi_j(\sigma)$:

$$\Phi_j(\sigma) = \sum_{k=1}^{K_j} \left(\sum_{r=1}^{R} \int_{M_r} \sigma_r(\xi) \Gamma_{r,k}^j(\xi) d\mu_r(\xi) \right)^2, \qquad (15)$$

$$j = 1, 2$$

с заданными функциями $\Gamma_{r,k}^j(\xi)$. Эти функции ассоциируются с элементами корреляционной матрицы для компонент распределения плотностей с различными носителями M_r.

Решение задачи (12)–(13) имеет вид:

$$\sigma_r(\xi) = p_r^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_r^i(\xi). \qquad (16)$$

Для каждой из j-ой задачи (12), (14) существует неотрицательная матрица K_r^j, являющаяся сверткой по индексу k матрицы $\Gamma_{r,k}^j(\xi)$ самой с собой и

$$\sum_{r=1}^{R} K_r^j(\xi) \sigma_r(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_r^i(\xi). \qquad (17)$$

Множители Лагранжа λ_i находятся во взаимно однозначном соответствии с величинами f_i и определяются как устойчивые приближенные решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): $a\lambda = f_\delta$, $a = \{a_{ij}\}$

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{R} \int_{M_r} p_r^2(\xi) Q_r^i(\xi) Q_r^j(\xi) d\mu_r. \qquad (18)$$

Принципиальное значение в методе линейных интегральных представлений играет требование квадратичности минимизируемого функционала (13) либо его обобщения (14), поскольку в этом случае обеспечивается линейность уравнений Эйлера для вариационной задачи (уравнения (15), (16)) и, как следствие, возможность сведения задачи о нахождении плотностной модели к приближенному устойчивому решению СЛАУ. Таким образом “аналитический мир” линейных интегральных представлений порожден представлением (15)–(16). Лежащие в их основе функции $Q_r^i(\xi)$ представляют собой ядра Пуассона и являются гармоническими в области V функциями либо их краевыми значениями на элементах – носителях источников $\sigma_r(\xi)$–M_r. Следовательно решения, получаемые в методах линейных интегральных представлений, представляют собой заданные на этапе постановки задачи линейные преобразования от гармонической в изучаемой области функции либо их краевые значения на носителях M_r. Таким образом экстремальные апроксимационные свойства гармонических функций приводят к получению в качестве решений (например, для пространственного случая) предопределенного вида трансформации гармонических распределений, что явно не подходит для изучения локальных неоднородностей среды.

ЭФФЕКТЫ ГАРМОНИЧНОСТИ В СТРУКТУРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГРАВИМЕТРИИ

Описанные эффекты скрытой эквивалентности, проявляющиеся, в частности, в концентрации максимальных значений модуля искомых параметров у границы любой из подобластей изучаемой области, теоретически исследованы для линейных задач. Их причина кроется в принципе максимума модуля для гармонических функций, а сами гармонические функции возникают как прообраз квазирешений обратных задач при проектировании на модельный класс в силу особых экстремальных свойств гармонической функции относительно оператора (2). Именно гармоническая функция является нормальным решением для (2) в норме $L_2(V)$. Подобный эффект проявляется и в нелинейных задачах. Важнейший их частный случай – структурные обратные задачи.

В горизонтальной полосе П, ограниченной в области $E_$ вертикальными координатами (z_1, z_2) расположено N слоев, ограниченных $N + 1$ плотностной границей. Каждый слой имеет плотность, которая известна и может быть переменной по литерале, за исключением плотности σ_{N+1} слоя, лежащего ниже последней границы (номер N). Эта плотность считается известной, постоянной и равной введенной ранее фоновой плотности. Границы, ограничивающие пласты, представляют со-

бой однозначные функции пространственных координат. Вне некоторой цилиндрической области V, горизонтальное основание которой (проекция на плоскость E_0) есть S; $s = \{x, y\} \in S$, а боковая поверхность – D, границы выходят на асимптоты. Точный смысл понятию асимптот в данных модельных представлениях можно придать следующим предположением. Плотность вне V постоянна вдоль каждого луча, выходящего из любой точки на D ортогонально этой поверхности. Главным предметом изучения в этой модели служат плотностные границы. Влияние объектов вне области V учитывается соответствующими процедурами редуцирования. В частности асимптотическое поведение границ вне D рассчитывается и их гравитационное влияние моделируется. Будем считать, что плотностные границы описываются функциями $\mathbf{f}(s)$: $z_i = f_i(x, y)$, $i = 0, 1, ..., N$, и плотность пласта, заключенного между границей с номером $i - 1$ и границей с номером i, есть $\sigma_i(x, y)$. В связи с тем, что в практике интерпретации гравитационных полей принято работать с аномальными эффектами и избыточными (относительно некоторого уровня) плотностями, можно считать, что плотность объектов ниже границы с номером N равна нулю, что означает $\sigma_{N+1} = 0$. Это означает, что все плотности посчитаны в отношении к плотности нижележащей среды. Кроме того, считаем, что $\sigma_0 = 0$, что является идеализацией. На практике эти условия легко обходятся введением дополнительной верхней и нижней горизонтальных границ на глубинах z_1 и z_2, с соответствующими процедурами редуцирования. В приведенных представлениях о строении среды связь между вертикальной производной гравитационного потенциала и параметрами модели среды в области V легко получается из (2) [Кобрунов, 2008]:

$$A[\mathbf{f}(s)] = \sum_{i=0}^{N} \iint_S \frac{\Delta\sigma_i dxdy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x,y)\}^2]^{1/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}. \quad (19)$$

Значимое отличие границ от известных к ним нулевых приближений $\mathbf{f}^*$: $z_i = f_i^*(x, y)$ с асимптотами, совпадающими с асимптотами для $f^*(x, y)$ имеется только в S.

Нормальное в $L_2^{N+1}(S)$ относительно нулевого приближения решение задачи (12) получается как введение условия:

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}^*\|^2_{L_2^{N+1}(S)} = \sum_{i=0-N} \int_S [\mathbf{f}(x,y) - \mathbf{f}^*(x,y)]^2 dxdy \to \min. \quad (20)$$

Следующее утверждение характеризует свойства этого решения.

Утверждение 2. Для того чтобы решение уравнения (12) было нормально в $L_2^{N+1}(S)$, необходимо, чтобы существовала гармоническая в V функция, граничные значения которой на каждой из искомых границ совпадает со значениями уклонения искомой границы от нулевого приближения, отнесенного к перепаду плотности на этой границе.

Для того чтобы убедиться в справедливости этого результата следует решить задачу (12)–(13) и построить для ее решения уравнение Эйлера:

$$f_i(x,y) - f_i^*(x,y) = \Delta\sigma_i \int_{E_0} \frac{\varphi(s_0)\, d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x,y)\}^2]^{1/2}}, \quad (21)$$

которое можно тождественно переписать:

$$\frac{\sum_{i=0..,N} [f_i(s) - f_i^*(s)]}{\Delta\sigma_i} = G(s, f_i(s)). \quad (22)$$

Здесь G единая для всех $i = 0$–N гармоничная в V функция определенная в правой части (14), $\mu(s_0)$ мера на E_0. Это может быть обычная мера Лебега либо атомическая, связанная с поточечно заданным полем, мера. Убывание функций с представлением

$$G(s,z) = \int_{E_0} \frac{\varphi(s_0)\, d\mu(s_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x,y)\}^2]^{1/2}}. \quad (23)$$

При увеличении глубины z для $\varphi(s_0) \in L_2(E_0)$ влечет за собой уменьшение уклонения результата относительно нулевого приближения (формула (15)) с учетом контрастности границы (перепад плотности). Чем менее контрастность, тем меньше вариация границы относительно заданного нулевого приближения, то же самое происходит с увеличением глубин залегания границ. Более глубокие границы меньше изменяются относительно нулевого приближения, чем приповерхностные. Это хорошо наблюдаемый при реальных расчетах эффект связан не с геологическими факторами, а единственно с аналитическими свойствами гармонических функций и их проявлениями в результатах решения обратных задач.

ПУТИ ПРЕОДОЛЕНИЯ ЭФФЕКТОВ СКРЫТОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Эффекты скрытой эквивалентности связаны со специфическими аналитическими свойствами нормальных решений обратной задачи гравиметрии в пространствах с квадратичной метрикой. В этой связи один из путей их преодоления состоит

в управлении экстремальными свойствами за счет модификаций вычислительных схем нахождений квазирешений.

Собственно эффекты скрытой эквивалентности состоят в получении результатов при решении обратной задачи гравиметрии, обладающих специфическими аналитическими свойствами, следующими из их свойств оптимальности. Эти свойства оптимальности заложены в конструкциях алгоритмов, и они не адекватны интуитивно подразумеваемым свойствам при формировании содержательных аппроксимационных конструкций. Для преодоления эффектов скрытой эквивалентности, а по существу рассогласованности оптимизационных свойств результата решения и лежащих в основе содержательности, следует иметь возможность управлять параметрами нормальных решений, меняя их до согласования с содержательными. Свойства нормальных решений обратных задач в банаховых пространствах и пространствах с нормой трансформаций искомого распределения следуют из уравнений Эйлера для вариационной задачи:

$$\|F\sigma(v)\|_X \to \min. \tag{24}$$

При условии (2). Здесь F линейный замкнутый оператор с ядром, не имеющий общих элементов (кроме нуля) с ядром оператора (2). Множества нормальных решений уравнения (2) относительно нормы $\|F\sigma(v)\|_X$ при $u(s_0)$, пробегающем все $\operatorname{Im} A_V \subseteq Y$, описывает некоторое многообразие $\Re(A_V, X, F)$. Для рефлексивных пространств X и взаимно однозначных операторов $F: X \to X$ находится во взаимно однозначном соответствии с $\operatorname{Im} A_V$ и поэтому на $\Re(A_V, X, F)$ решение уравнения (1) существует и единственно. Эти многообразия называются экстремальными классами. Их конструктивное описание, соответствующее наиболее распространенным видам норм, и анализ связей между ними выполнены в работах [Кобрунов, 2013]. Наибольший практический интерес представляют классы $\Re(A_V, L_2, F)$. Управление вычислительным процессом, обеспечивающим выделение решений с заданными экстремальными свойствами, реализуется, например, модификацией итерационного процесса (11) в виде:

$$\sigma^{n+1}(v) = \sigma^n(v) + (F^*F)^{-1}\alpha^n P^*_{L_2(v)} \\ (A_V^*\mathbf{\Psi}[A_V[P_{L_2(v)}(\sigma^n(v), M)] - u(S_0)], M). \tag{25}$$

При этом условие того чтобы M было классом единственности уже излишне. В том случае, когда $M = L_2(V)$ предел в (24) принадлежит $\Re(A_V, L_2, F)$ и в силу однозначной разрешимости (2) на этом экстремальном классе служит решением для задачи (2), (23). Подбор оператора F в (23) трактуется как выражение априорной информации. Именно так представляется дело в методах линейных интегральных представлений для решений обратной задачи гравиметрии. Однако здесь следует принимать во внимание два обстоятельства.

Первое состоит в том, что проявление эффекта скрытой эквивалентности в форме появления гармонических функций заменой гармонической функции на ее трансформацию, по сути, с содержательной точки зрения ничего не меняет. Во вторых, проявление эффекта скрытой эквивалентности это несоответствие принципов близости, подразумеваемых при формировании аппроксимационной конструкции и тех принципов оптимальности, которые проявляются в решениях обратных задач и проявляются в специальных аналитических свойствах решений. Действительно, если оператор F рассматривать, например, как в (13) представляющим собой деление на весовую функцию $p(v)$, то результат в (24), в соответствии с (15), имеет описание как проекция на M произведения $p^2(\xi)$ и гармонической функции. Интуитивное ожидание того, что при равных для всех точек области V значениях весов $p(\xi)$ будут получены приблизительно равнозначные уклонения найденного решения от нуля, явно не оправдываются, поскольку решение представляет собой гармоническую функцию. Априорные предпосылки при формировании весовой функции не выполняются в результате решения. Выходом может служить либо корректировка вида весовой функции по итогам решения обратной задачи с последующим повторным решением с новой весовой функцией, либо корректировка оператора F в процессе итераций в (24). Первый путь реализовывался в технологиях построения уравновешивающих решений [Кобрунов, 1978; 1979]. Он рассматривался также в работе [Yago Li fyl Douglas, 1998]. Второй – предусматривал динамическое изменение весовой функции в итерационном процессе – аналоге (24) (без использования оптимизационных свойств решений, стоящих за результатом) и отражал особенности пошагового получения решения. Это метод “фокусировки” в задачах электроразведки [Жданов, 2007] и адаптивные алгоритмы решения обратных задач [Коченев, 1993]. В этом направлении находятся и методы гидродинамических аналогий [Данилов, 1996] для обратных задач гравиметрии, которые допускают интересное развитие в задачи геодинамического моделирования с использованием гравитационных полей как краевых условий [0].

Однако подобные приемы, рассматриваемые как универсальные, имеют весьма ограниченную область “полезности решаемой задачи”. Они дают положительные результаты на очень простых примерах, весьма удаленных от нужд современ-

ной практики, состоящей в изучении сложных, многопараметрических моделей. Рассмотрение действительно интересных задач требует тщательной работы над компонентами входящими в критерий оптимальности, характеризующий классы $\Re(A_V, L_2, F)$. Кроме того, чаще всего необходимо реализовывать совместную инверсию данных нескольких геофизических методов, чаще всего сейсмо- и гравиметрии, сопровождая это тщательным подбором и анализом критериев оптимальности. На этом пути собственно инверсия – решение обратной задачи, это лишь небольшой вычислительный этап.

Понимание этого обстоятельства выводит на передний план совершенно иную постановку обратных задач гравиметрии, в которых требование адекватности изучаемой модели гравитационному полю выносится на второй план и служит лишь краевым условием для иной – динамической задачи. Эта постановка лишена проблем, связанных с эффектами скрытой эквивалентности, и состоит в следующем. Пусть плотностная модель претерпевает эволюцию, контролируемую параметром t (условное время) и ее состояние для каждого значения этого параметра описывается семейством $\sigma(v,t)$. Уравнение эволюции $\Xi[\sigma(t, v), \mathbf{V}(t, v), t] = 0$ включает в себя неопределенные геодинамические параметры $\mathbf{V}(t, v)$, контролирующие характер эволюционного процесса, а краевым условием для уравнения эволюции служит требование, чтобы в конечном состоянии при $t \to T$ модель $\sigma(v,t)$ стремилась к состоянию поле, от которого соответствует заданному $u(s_0)$. Итоговая задача формулируется следующим образом [Кобрунов, 2012]:

$$\begin{gathered}\Xi[\sigma(t,v),\mathbf{V}(t,v),t]=0;\\ \lim_{t\to T} A[\sigma(t,v)]\to u(s_0);\\ \sigma(0,v)=\sigma^0(v);\\ \mathbf{V}(t,v)\in M.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь M заданный класс для геодинамических параметров; $\sigma^0(v)$ заданное начальное приближение.

В формулировке (25) принимается гипотеза о том, что современное состояние модели есть результат ее эволюции от некоторого начального состояния, к современному, контролируемым измеренным гравитационным полем. Движение управляется геодинамическими параметрами, подчиненными условию, приводящему исходное состояние (модели) к состоянию с заданным полем. В такой постановке задача инверсии поля подменяется задачей динамического развития модели с введением итогового условия соответствия развития модели современному, реально заданному полю. Итерационный процесс, реализующий постановку задачи (25), состоит в пошаговом уточнении геодинамических параметров $\mathbf{V}(t, v)$, выраженных в форе операторов от текущей невязки полей между моделью среды на текущей итерации и заданного поля.

ВЫВОДЫ

Изученные в работе эффекты скрытой эквивалентности состоят в получении в качестве квазирешений обратной задачи гравиметрии аппроксимации нормальных решений с неадекватной принципу содержательности нормой. Их свойства, во-первых, априори не контролируемы в рамках идеологии аппроксимационного подхода и приводят к получению заведомо ошибочных результатов геоплотностного моделирования. Во вторых, эффекты скрытой эквивалентности в полной мере проявляются для многопараметрических моделей, необходимость введения которых предопределена требованием адекватности методов современным реальным практическим задачам. Эти обстоятельства являются причиной снижения эффективности гравиметрического метода при изучении сложно построенных сред, характеризующихся распределенными параметрами, в частности при изучении локальных неоднородностей в верхней части литосферы. Эффекты скрытой эквивалентности характерны при изучении наиболее изученных локально распределенных плотностных моделей, так и для изучения многослойных структурных систем. Показано, в частности, что структурные системы оказываются связанными с краевыми значениями гармонических функций на поверхностях, образованных самими структурами, и это влечет преимущественное варьирование в результатах решения обратных задач верхних границ по отношению к нижним. Этот эффект, хорошо известный в практике автоматизированной интерпретации, нашел свое обоснование как систематически и с необходимостью проявляющееся правило – эффект скрытой эквивалентности.

Значимость полученных результатов состоит в том, что для сложных многопараметрических моделей сред, адекватных современной интерпретационной практике, должны быть изменены принципы, лежащие в основе постановки обратных задач. Возникающие проблемы непреодолимы внутри гравиметрического метода в рамках аппроксимационного подхода в его классическом понимании.

Преодоление описанных эффектов находится на пути дополнения аппроксимационного подхода для сложных условий (модели сред с пространственно распределенными параметрами), критериальными и динамическими принципами. Критериальные принципы обеспечивают управления

свойствами нормальных решений. Динамические обеспечивают согласованность результата с процессами трансформации моделей в процессе их геодинамического развития. В совокупности они преобразуют обратную задачу гравиметрии в задачу системной инверсии с широким привлечением априорных сведений об изучаемом объекте, включая информацию о его генезисе. Эта информация реализуется в виде параметров функционала – нормы относительно которой ищется нормальное решение и геодинамических параметров, контролирующих эволюцию геодинамической системы. За счет того, что геодинамические параметры контролируются и уточняются величиной невязки полей в процессе оптимизации модели, теоретически обеспечивается возможность одновременного уточнения и геодинамических параметров в процессе геоплотностного моделирования по гравиметрическим данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Андреев Б.А., Клушин И. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. Гостоптехиздат. 1962.

Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Физматгиз. 1966.

Данилов В.Л. Методы установления в прикладных обратных задачах потенциала гравитационной разведки и теории Фигуры Земли. М.: Наука. 1996. 248 с.

Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир. 2007. 710 с.

Иванов В.К. и др. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.

Кобрунов А.И. О методе оптимизации при решении обратной задачи гравиразведки // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1978. № 8. С. 73–78.

Кобрунов А.И. К вопросу об интерпретации аномальных гравитационных полей методом оптимизации // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1979. № 10. С. 67–78.

Кобрунов А.И. К теории методов подбора // Геофизический журнал. 1983. Т. 5. № 4. С. 34–43.

Кобрунов А.И. Экстремальные классы в задачах гравиметрии и их использование для построения плотностных моделей геологических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Киев: Институт геофизики им. С.И. Субботина. АН УССР. 1985. 439 с.

Кобрунов А.И. Критерии оптимальности и свойства решений обратных задач // Геофизический журнал. Т. 30. № 3. 2008а. С. 75–87.

Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учебное пособие / А.И. Кобрунов. М.: изд-во ЦентрЛитНефтеГаз. 2008б. 286 с.

Кобрунов А.И. Геомоделирование на основе инверсии системы геофизических данных // ВЕСТНИК ЦКР РОСНЕДРА. 2012а. № 2. С. 46–52.

Кобрунов А.И. Аналитический мир линейных интегральных представлений В.Н. Страхова. Академик В.Н. Страхов. Геофизик и математик. М.: Наука. 2012б. С. 95–104.

Кобрунов А.И. Математические модели системного анализа в прикладной геофизике. LAP LAMBERT Academic Publishing / ISBN:978-3-659-39349-5, Saarbröcken, Deutchland. 2013а. 189 p.

Кобрунов А.И. Математические модели системного анализа в прикладной геофизике. LAP LAMBERT Academic Publishing / ISBN:978-3-659-39349-5, Saarbröcken, Deutchland. 2013б. 189 p.

Коченев В.А. Адаптивные методы решения обратных задач геофизики. Красноярск: изд-во Красноярского государственного университета. 1993а. 129 с.

Магницкий В.А. К вопросу о выделении локальных гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. Геогр. и геофиз. 1949. Т. 13. № 6. С. 556–562.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Осипов В.Ю., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Методика и новые сеточные алгоритмы построения 3D плотностных моделей // Геофизика. № 1. 2013. С. 41–47.

Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 165–168.

Страхов В.Н. О путях построения математической теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий // Прикл. геофизика. М.: Гостоптехиздат. 1962. № 35. С. 95–128.

Страхов В.Н. К теории метода подбора // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. 1964. № 4. С. 494–509.

Страхов В.Н. О решении линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Докл. АН СССР. 1990а. Т. 310. № 6. С. 1348–1352.

Страхов В.Н. Корреляционный метод решения линейной обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1990б. Т. 311. № 1. С. 63–66.

Страхов В.Н. Решение линейной обратной задачи гравиметрии с учетом структурной информации об искомом решении // Докл. АН СССР. 1990в. Т. 311. № 2. С. 331–334.

Страхов В.Н. О решении линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии при наличии фоновых полей // Докл. АН СССР. 1990г. Т. 311. № 3. С. 586–590.

Страхов В.Н. Явные аналитические представления решений линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии при континуальных данных // Докл. АН СССР. 1990д. Т. 311. № 4. С. 845–848.

Страхов В.Н. К теории линейной обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1990е. Т. 311. № 5. С. 1093–1096.

Страхов В.Н. Вариационные методы в теории линейных трансформаций гравитационных и магнитных аномалий // Докл. АН СССР. 1990д. Т. 312. № 1. С. 63–67.

Страхов В.Н. Алгебраические методы в линейных задачах гравиметрии и магнитометрии: Основные идеи // Докл. АН СССР. 1991а. Т. 319. № 1. С. 143–146.

Страхов В.Н. Алгебраические методы в линейных задачах гравиметрии и магнитометрии: Постановки экстремальных задач // Докл. АН СССР. 1991б. Т. 319. № 2. С. 342–346.

Страхов В.Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий) // Вестн. ОГГГГН РАН. 1998. Т. 1. № 3. С. 100–152.

Страхов В.Н., Страхов А.В. Аппроксимационный подход к решению задач гравиметрии и магнитометрии. I. Основная вычислительная проблема – регуляризация систем линейных алгебраических уравнений // Российский журнал наук о Земле. 1999а. Т. 1. №. 4. С. 271–299.

Страхов В.Н., Страхов А.В. О нахождении устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений большой и сверхбольшой размерности, возникающих в линейных задачах гравиметрии и магнитометрии // Геофиз. журн. 1999б. Т. 21. № 1. С. 20–39.

Юньков А.А., Булах Е.Г. О точности определения плотности аномальных масс методом сеток // Докл. АН УССР. 1958. № 11. С. 1234–1237.

Yago Li fyl Douglas W. Oldeburg 3D inversion of gravity data. Geophysics. V. 63. № 1 (January–February 1998). P. 109–119.